

## PELABELAN SUPER MUKA ANTI-AJAIB PADA KELAS GRAF PLANAR

*Super Anti-Magic Labelings of A Class of Planar Graphs*

CHRISTIAN HALIM<sup>1</sup>, FRANCIS Y. RUMLAWANG<sup>2</sup>, HENRY W. M. PATTY<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Kelompok Aljabar Jurusan Matematika FMIPA UNPATTI

<sup>2,3</sup>Staf Jurusan Matematika FMIPA UNPATTI

Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon, Maluku

e-mail: christianhalim11@yahoo.com1, rumlawang@yahoo.com, henry\_4t00@yahoo.com

### ABSTRAK

Penelitian ini berfokus pada pelabelan super anti-ajaib dari graf planar tipe  $(a, b, c)$ . Akan ditunjukkan bahwa suatu kelas dari graf planar yang didefinisikan menggunakan graf lengkap dan suatu kelas dari graf planar yang didefinisikan menggunakan graf bipartit lengkap adalah  $(1, 1, 0)$  dan  $(1, 1, 1)$  super anti-ajaib dengan keadaan tertentu.

**Kata kunci :** *Graf bipartit lengkap, graf lengkap, graf planar, pelabelan super anti-ajaib  $(1, 1, 0)$ , pelabelan super anti-ajaib  $(1, 1, 1)$ .*

### PENDAHULUAN

Diberikan  $G$  suatu graf bidang, berhingga, sederhana, tak berarah, dan tak terhubung, dengan himpunan titik  $V$ , himpunan sisi  $E$ , dan himpunan muka  $F$ . Pelabelan graf adalah fungsi yang memetakan elemen-elemen pada graf ke himpunan bilangan (umumnya bilangan bulat positif atau tak negatif).

Pada penelitian ini, dibahas pelabelan total, yaitu pelabelan dengan domain  $V \cup E$  dan pelabelan dengan domain  $V \cup E \cup F$ , disebut pelabelan  $(1,1,1)$ . Secara formal pelabelan total merupakan fungsi bijektif

$$\lambda: V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, |V| + |E|\}.$$

Bobot muka dari pelabelan merupakan jumlahan dari semua label (jika ada) yang dimiliki oleh muka, sisi-sisi, dan titik-titik yang mengelilinginya.

Pelabelan pada suatu graf bidang  $G$  disebut  $d$ -muka anti-ajaib, jika untuk setiap bilangan  $s$ , himpunan dari bobot muka dengan  $s$ -sisi,  $\omega_s = \{a_s, a_s + d, a_s + 2d, \dots, a_s + (f_s - 1)d\}$  untuk suatu bilangan bulat  $a_s > 0$  dan  $d \geq 0$ , dimana  $f_s$  adalah banyak muka dengan  $s$ -sisi. Pelabelan tersebut dikatakan *super*, jika label terkecil yang mungkin muncul pada titik-titik.

Sebuah kelas dari graf planar dapat diperoleh dengan cara menghilangkan beberapa sisi dari graf lengkap. Kelas

dari graf planar yang diperoleh dinotasikan dengan  $Pl_n$  dan mengandung jumlah maksimum dari sisi-sisi yang mungkin dalam suatu graf planar dengan  $n$  titik.

Didefinisikan kelas graf planar lain yang diperoleh dari graf bipartit lengkap  $K_{m,n}$ , dengan  $m, n \geq 3$  dengan menghilangkan beberapa sisi untuk menjadikannya graf planar, disebut kelas planar bipartit dan dinotasikan dengan  $Pl_{m,n}$ . Graf  $Pl_{m,n}$  mempunyai jumlah maksimum sisi yang mungkin untuk suatu graf bipartit planar.

Penelitian ini difokuskan pada pelabelan super anti-ajaib pada kelas  $Pl_n$  dan  $Pl_{m,n}$  dari graf planar.

### TINJAUAN PUSTAKA

Dalam [2], [3], dan [5], diberikan definisi-definisi serta teori yang penulis gunakan dalam penulisan ini. Dalam [1], [5], dan [6], diberikan pelabelan-pelabelan lain yang telah diteliti sebelumnya. Dalam [6], Tilukay, dkk. memberikan pelabelan total super  $d$ -muka anti-ajaib dari hasil korona dari graf pohon dengan  $r$  buah graf lintasan. Dalam [4], Ramanjaneluyu memberikan pelabelan pada graf yang sama namun belum umum untuk setiap graf sehingga penulis mendefinisikan pelabelan lain yang menyempurnakannya.

**HASIL DAN PEMBAHASAN**

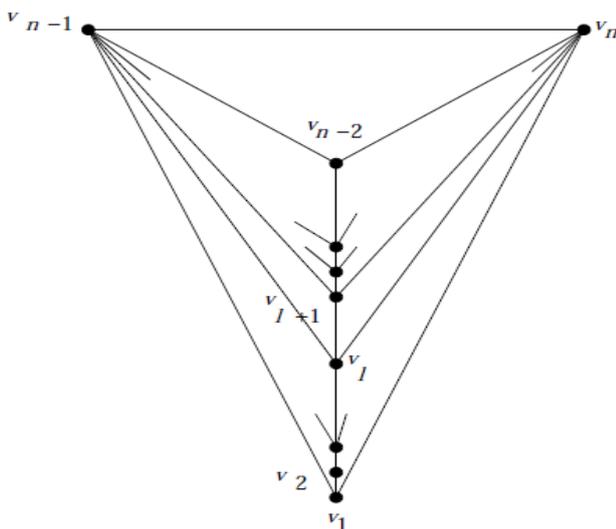
**Kelas  $Pl_{m,n}$  dari Graf Lengkap**

Misal  $K_n$  graf lengkap dengan  $n$  titik  $V_n = \{1,2, \dots, n\}$ . Kelas dari graf  $Pl_n$  memiliki himpunan titik  $V_n$  dan himpunan sisi  $E_n = E(K_n) \setminus \{(k, l) : 3 \leq k \leq n, k + 2 \leq l \leq n\}$ .

Graf  $Pl_n$  dapat dideskripsikan sebagai berikut:

1. Letakkan titik  $v_1, v_2, \dots, v_{n-2}$  pada garis vertikal dengan  $v_1$  di paling bawah, dan  $v_{n-2}$  di paling atas.
2. Kemudian letakkan titik  $v_{n-1}$  dan  $v_n$  pada garis horizontal dengan  $v_{n-1}$  berada di sebelah kiri  $v_n$ , sedemikian sehingga titik-titik  $v_n, v_{n-1}$ , dan  $v_{n-2}$  membentuk muka segitiga (lihat Gambar 1).

Sisi-sisi dari graf  $Pl_n$  sekarang dapat digambarkan tanpa ada sisi yang saling berpotongan. Setiap muka pada graf ini panjangnya 3.



Gambar 1. Graf  $Pl_n$

**Teorema 3.1.**

Graf  $Pl_n$  dengan  $n \geq 5$  memiliki pelabelan super anti-ajaib tipe  $(1,1,0)$ .

**Bukti.**

Diberikan suatu kelas planar  $Pl_n(V, E)$  dengan  $n$  titik, yaitu  $v_1, v_2, \dots, v_n$  dan  $3n - 6$  sisi. Didefinisikan fungsi bijektif  $f : V \cup E \rightarrow A$ , dengan  $A = \{1,2, \dots, 4n - 6\}$  sebagai berikut :

Pelabelan titik :

$$f(v_i) = i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

Pelabelan sisi :

$$f(v_{n-1}, v_i) = 2n - 1 - i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 2$$

$$f(v_n, v_i) = 3n - 3 - i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 2$$

$$f(v_{n-1}, v_n) = 3n - 3$$

$$f(v_i, v_{i+1}) = 4n - 5 - i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 3$$

Karena label-label terkecil diberikan pada himpunan titik-titik, maka pelabelan ini merupakan pelabelan super. Selanjutnya dapat dilihat bahwa jumlah muka dalam pada  $Pl_n$  adalah  $2n - 5$ . Muka yang terbentuk dari titik-titik  $v_n, v_{n-1}, v_{n-2}, v_n$  memiliki bobot  $9n - 6$ . Sebanyak  $n - 3$  muka yang terbentuk dari titik-titik  $v_l, v_{l+1}, v_{n-1}, v_l$ , untuk  $1 \leq l \leq n - 3$  memiliki bobot  $9n - 8 - l$ , dan sisanya yaitu sebanyak  $n - 3$  muka yang terbentuk dari titik-titik  $v_l, v_{l+1}, v_n, v_l$ , untuk  $1 \leq l \leq n - 3$  memiliki bobot  $11n - 11 - l$ .

Perhatikan bahwa:

1. Hanya terdapat 1 muka dengan bobot  $9n - 6$ .
2. Terdapat  $n - 3$  muka dengan bobot  $9n - 8 - l$ , untuk  $1 \leq l \leq n - 3$ , yaitu :

$$\begin{aligned} l = 1 &\rightarrow 9n - 8 - 1 = 9n - 9 \\ l = 2 &\rightarrow 9n - 8 - 2 = 9n - 10 \\ &\vdots \\ l = n - 4 &\rightarrow 9n - 8 - (n - 4) = 8n - 4 \\ l = n - 3 &\rightarrow 9n - 8 - (n - 3) = 8n - 5 \end{aligned}$$

Sehingga bobot terkecil adalah  $8n - 5$  dan bobot terbesar adalah  $9n - 9$ .

3. Terdapat  $n - 3$  muka dengan bobot  $11n - 11 - l$ , untuk  $1 \leq l \leq n - 3$ , yaitu :

$$\begin{aligned} l = 1 &\rightarrow 11n - 11 - 1 = 11n - 12 \\ l = 2 &\rightarrow 11n - 11 - 2 = 11n - 13 \\ &\vdots \\ l = n - 4 &\rightarrow 11n - 11 - (n - 4) = 12n - 7 \\ l = n - 3 &\rightarrow 11n - 11 - (n - 3) = 12n - 8 \end{aligned}$$

Sehingga bobot terkecil adalah  $12n - 8$  dan bobot terbesar adalah  $11n - 12$ .

Dapat disimpulkan bahwa untuk  $n \geq 5$  dan  $1 \leq l \leq n - 3$  bobot-bobot tersebut memenuhi:

$$9n - 8 - l < 9n - 6 < 11n - 11 - l.$$

Atau dengan kata lain, setiap muka memiliki bobot yang berbeda.

Dengan demikian graf  $Pl_n$  dengan  $n \geq 5$  memiliki pelabelan super anti-ajaib tipe  $(1,1,0)$ .

**Akibat 3.2**

Graf  $Pl_n$  dengan  $n \geq 5$  memiliki pelabelan super anti-ajaib tipe  $(1,1,1)$ .

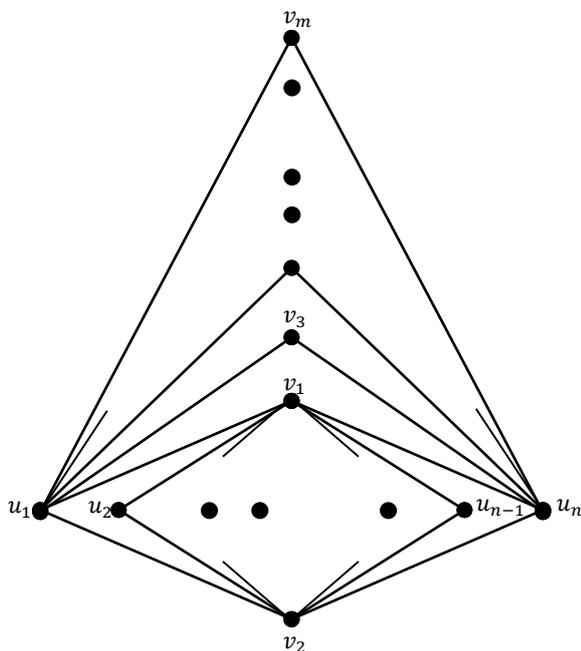
**Kelas  $Pl_{m,n}$  dari graf planar bipartit**

Diberikan graf bipartit lengkap  $K_{m,n}(V_m, U_n)$  dengan  $V_m = \{v_1, \dots, v_m\}$  dan  $U_n = \{u_1, \dots, u_n\}$ . Kelas graf  $Pl_{m,n}$  mempunyai himpunan titik  $V = V_m \cup U_n$  dan himpunan sisi  $E = E(K_{m,n}(V_m, U_n)) \setminus (v_l, u_p) : \{3 \leq l \leq m \text{ dan } 2 \leq p \leq n - 1\}$ .

Jumlah titik dan sisi pada graf  $Pl_{m,n}$  adalah  $m + n$  dan  $2m + 2n - 4$ .

Selanjutnya algoritma pelukisan graf  $Pl_{m,n}$  yang digunakan adalah sebagai berikut :

1. Tempatkan titik-titik  $u_1, u_2, \dots, u_n$  sepanjang garis horisontal dengan  $u_1$  sebagai titik ujung kiri dan  $u_n$  sebagai titik ujung kanan.
2. Tempatkan titik-titik  $v_m, v_{m-1}, \dots, v_3, v_1$  sepanjang garis vertikal dengan  $v_1$  sebagai titik ujung bawah dan  $v_m$  sebagai titik ujung atas sedemikian hingga  $v_m, v_{m-1}, \dots, v_3, v_1$  berada di atas  $u_1, u_2, \dots, u_n$ .
3. Tempatkan titik  $v_2$  di bawah  $u_1, u_2, \dots, u_n$  sedemikian hingga  $v_1, u_k, v_2, u_{k+1}$  membentuk muka dengan panjang 4 untuk  $1 \leq k \leq n - 1$ .



Gambar 2. Graf  $Pl_{m,n}$

**Teorema 3.3**

Graf  $Pl_{m,n}$  dengan  $m, n \geq 3$  memiliki pelabelan super anti-ajaib tipe  $(1,1,0)$ .

**Bukti.**

Diberikan suatu kelas planar  $Pl_{m,n}(V, E)$  dengan jumlah titik  $m + n$  yaitu  $v_1, v_2, \dots, v_m, u_1, u_2, \dots, u_n$  dan  $2m + 2n - 4$  sisi. Didefinisikan fungsi bijektif  $f: V \cup E \rightarrow C$  dengan  $C = \{1, 2, \dots, 4n - 6\}$  sebagai berikut :

Pelabelan titik :

$$f(v_i) = i \quad \text{untuk } 1 \leq i \leq m;$$

$$f(u_i) = i + m \quad \text{untuk } 1 \leq i \leq n.$$

Pelabelan sisi :

$$f(v_1, u_i) = i + m + n, \quad \text{untuk } 1 \leq i \leq n;$$

$$f(v_2, u_i) = i + m + 2n, \quad \text{untuk } 1 \leq i \leq n;$$

$$f(u_1, v_j) = 3(m + n) + 1 - 2j$$

$$\quad \quad \quad \text{untuk } 3 \leq j \leq m;$$

$$f(u_n, v_j) = 3(m + n) + 2 - 2j,$$

$$\quad \quad \quad \text{untuk } 3 \leq j \leq m.$$

Karena label-label terkecil diberikan pada himpunan titik-titik, maka pelabelan ini merupakan pelabelan super. Selanjutnya dapat dilihat bahwa jumlah muka dalam pada  $Pl_{m,n}$  adalah  $m + n - 3$ . Muka yang terbentuk dari titik-titik  $v_1, u_1, v_3, u_n, v_1$  memiliki bobot  $10(m + n) - 3$ . Sebanyak  $n - 1$  muka yang terbentuk dari titik-titik  $v_l, u_l, v_2, u_{l+1}, v_1$ , untuk  $1 \leq l \leq n - 1$  memiliki bobot  $6(m + n + l + 1)$ , dan sisanya yaitu sebanyak  $m - 3$  muka yang terbentuk dari titik-titik  $u_1, v_k, u_n, v_{k-1}, u_1$ , untuk  $4 \leq k \leq m$  memiliki bobot  $14m + 13n + 10 - 6k$ .

Dapat dilihat bahwa setiap muka memiliki bobot yang berbeda, maka graf  $Pl_{m,n}$  dengan  $m, n \geq 3$  memiliki pelabelan super anti-ajaib tipe  $(1,1,0)$ .

**Akibat 3.4** Graf  $Pl_{m,n}$  dengan  $m, n \geq 3$  memiliki pelabelan super anti-ajaib tipe  $(1,1,1)$ .

**KESIMPULAN**

Berdasarkan hasil dari penelitian, dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut :

1. Graf  $Pl_n$  dengan  $n \geq 5$  memiliki pelabelan super anti-ajaib tipe  $(1,1,0)$  dan  $(1,1,1)$ .
2. Graf  $Pl_{m,n}$  dengan  $n, m \geq 3$  memiliki pelabelan super anti-ajaib tipe  $(1,1,0)$  dan  $(1,1,1)$ .

**DAFTAR PUSTAKA**

1. Baca, M. & M. Miller, 2008, *Supers edge-antimagic graphs*, Florida
2. Diestel, Reinhard, 2000, *Graph theory electronic edition 2000*. Springer-Verlac, New York
3. Harris, John, 2008, *Combinatorics and graph theory*, New York.

4. Ramanjaneyulu, K., 2008, *Anti-magic labellings of a class of planar graphs*. Australian Journal of Combinatorics volume 41: 283-290
5. Rossen, Kenneth H., 2012, *Discrete mathematics and its applications*. McGraw-Hills, New York
6. Tilukay, M. I., Salman, A. N. M., Elviyenti, M., 2012, *On super d-face antimagic total labelings of the corona product of a tree with r copies of a path*. AIP Conf. Proc. 1450, 218